MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies sur [0, 1] à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont deux fois dérivables sur [0, 1] et dont la dérivée seconde est continue sur [0, 1].

On appelle S le sous-ensemble de E constitué des fonctions s telles que :

— sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ s soit la restriction d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3;

— et que sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ s soit la restriction d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

1° Soit g la fonction de [0, 1] dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 2x^2 - x + 1 \quad \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

et

$$g(x) = ax^3 + bx + c \quad \text{si} \quad x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right].$$

Déterminer les réels a, b et c pour que g appartienne à S. (Étudier la dérivée seconde de g pour $x = \frac{1}{2}$.)

2° Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E.

Tournez la page S. V. P.

3° On considère le sous-ensemble S_0 de S constitué des fonctions s telles que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad s(x) = 0.$$

Montrer que S_0 est un sous-espace vectoriel de S, de dimension 1 et que l'application e_4 définie sur [0, 1] par

$$e_4(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad e_4(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \quad \text{si} \quad x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$$

constitue une base de S_0.

On définit ensuite les quatre applications e_0, e_1, e_2, e_3 de [0, 1] dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, 1] \quad e_0(x) = 1; \quad e_1(x) = x; \quad e_2(x) = x^2; \quad e_3(x) = x^3$$

On considère le sous-espace vectoriel S_1 de S engendré par ces quatre applications.

4° *a.* Montrer que S_0 et S_1 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de S et que le système $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de S.

b. Donner les coordonnées de la fonction g du 1° dans cette base B.

5° *a.* Justifier rapidement pourquoi tout élément de S est trois fois dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

b. On considère l'application u de S dans $\mathbb{R}^5$ définie pour tout élément s de S par :

$$u(s) = \left(s(0), s'(0), s''(0), s'''(0), s'''(1)\right)$$

Montrer rapidement que u est linéaire.

c. Montrer que u est bijective.

d. Donner la matrice de u relativement à la base B de S et à la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

6° On considère maintenant l'application w de S dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout élément s de S par

$$w(s) = \left(s(0), s\left(\frac{1}{2}\right), s(1), s'(0), s'(1)\right)$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail